++ de Topologie

et Espaces de Fonctions

Louis AUFFRET

Jeudi 22 mai 2024

Espaces métriques

Une *distance* d sur E est une application positive $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- Séparation : $d(a, b) = 0 \iff a = b$
- Symétrie : $d(a, b) = d(b, a)$
- Inégalité triangulaire : $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

Un couple (E, d) est un *espace métrique*.
Sur un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$, l'application $(a, b) \longmapsto ||a - b||$ est une distance.
Sauf mention contraire, tout espace vectoriel normé est supposé muni la distance associée à sa norme.
Dans toute la suite, si on ne précise pas la nature de E, c'est un espace métrique.

Boules ouvertes, fermées

Boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$:

$$B(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) < r\}$$

Boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$:

$$B_f(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) \leq r\}$$

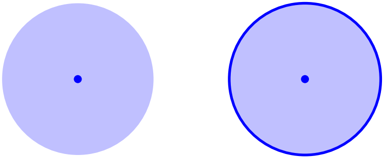

Figure – Boule ouverte, boule fermée

Ouverts, fermés

Soit A une partie quelconque de E, x un point quelconque de E.

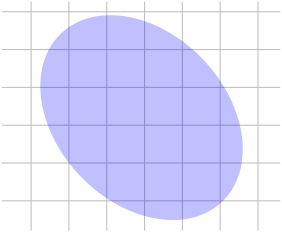

Figure – $A \subset E$

3 possibilités mutuellement exclusives :

Soit A une partie quelconque de E, x un point quelconque de E.

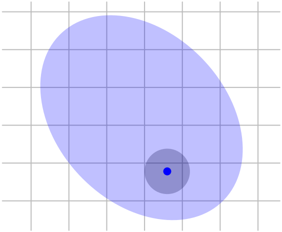

Figure – $A \subset E$, $x \in \mathring{A}$

3 possibilités mutuellement exclusives :
1 - x est à l'intérieur de A : il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans A.

Soit A une partie quelconque de E, x un point quelconque de E.

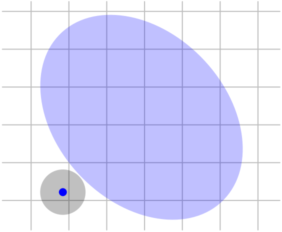

Figure – $A \subset E$, $x \in \overset{\circ}{\widehat{A^C}}$

3 possibilités mutuellement exclusives :
2 - x est à l'extérieur de A : il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans A^C.

Ouverts, fermés

Soit A une partie quelconque de E, x un point quelconque de E.

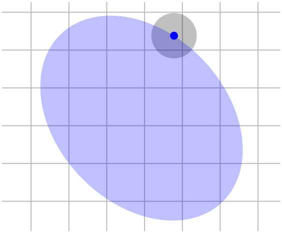

Figure – $A \subset E$, $x \in \mathrm{Fr}(A)$

3 possibilités mutuellement exclusives :
3 - x n'est ni l'un ni l'autre, donc toute boule ouverte centrée en x contient au moins un point de A et un point de A^C

Ouverts, fermés

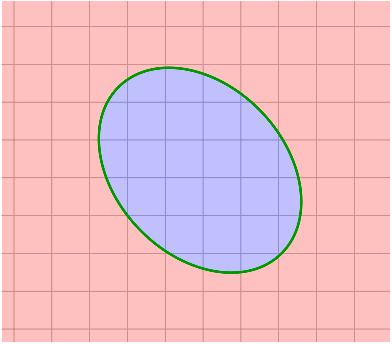

Figure – $A \subset E$, intérieur, extérieur, frontière

- $\mathring{A}$ = intérieur
- $\overline{A}$ = intérieur $\cup$ frontière
- $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}\left(A^C\right)$ = frontière
- $\overset{\circ}{\widehat{A^C}} = \left(\overline{A}\right)^C$ = extérieur
- $\overline{A^C} = \left(\mathring{A}\right)^C$ = extérieur $\cup$ frontière

Soit $A \subset E$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est ouvert
- $\forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \in A$
- $A \subset \mathring{A}$ (c'est-à-dire $A = \mathring{A}$)
- A ne contient aucun point de sa frontière
- A est un voisinage de chacun de ses points
- A^C est fermé

Soit $A \subset E$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est fermé
- $\forall x \in E, (\forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \varnothing) \implies x \in A$
- $\overline{A} \subset A$ (c'est-à-dire $\overline{A} = A$)
- A contient tous les points de sa frontière
- toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A
- A^C est ouvert

Ouverts, fermés

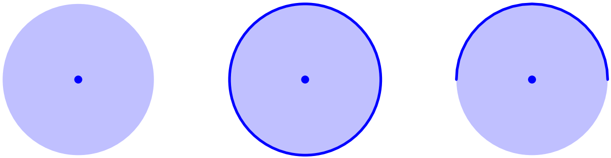

Figure – un ouvert, un fermé, puis ni l'un ni l'autre

On a, dans (E, d) :

- E et $\varnothing$ sont ouverts
- les ouverts sont stables par union quelconque (si tous les U_i, $i \in I$ sont ouverts, $\bigcup_{i \in I} U_i$ aussi)
- les ouverts sont stables par intersection finie (si tous les U_i, $1 \leq i \leq n$ sont ouverts, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ aussi)
- E et $\varnothing$ sont fermés
- les fermés sont stables par intersection quelconque (si tous les F_i, $i \in I$ sont fermés, $\bigcap_{i \in I} F_i$ aussi)
- les fermés sont stables par union finie (si tous les F_i, $1 \leq i \leq n$ sont fermés, $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ aussi)

Voisinages

Soit $x \in E$. Un *voisinage* V de x est une partie de E contenant un ouvert contenant x

$\iff$ C'est une partie de E contenant une boule ouverte centrée en x

$\iff$ x est un point intérieur de V

Valeurs d'adhérence

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On note $X_n := \{x_k,\ k \geq n\}$, et on pose :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n}$$

l'ensemble des *valeurs d'adhérence* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists k \geq n,\ d(x, x_k) < \varepsilon$
- il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x

Continuité en un point

Soient (E, d), (F, d') des espaces métriques, $x \in E$ et $f : E \longrightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue en x
- pour tout voisinage V' de $f(x)$, il existe un voisinage V de x tel que $f(V) \subset V'$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ f\left(B(x,\delta)\right) \subset B\left(f(x), \varepsilon\right)$
- pour tout voisinage V' de $f(x)$, $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ B(x,\delta) \subset f^{-1}\left(B\left(f(x), \varepsilon\right)\right)$

Continuité

Comme une partie de E est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points, on peut s'en servir pour démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue en x pour tout $x \in E$
- l'image réciproque de tout ouvert de F par f est un ouvert de E
- l'image réciproque de tout fermé de F par f est un fermé de E

On dit alors que f est *continue*.

Espaces préhilbertiens

Un produit scalaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $\langle ., . \rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$

- bilinéaire : linéaire à gauche et à droite (ou semi-linéaire à gauche et linéaire à droite si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
- symétrique (ou à symétrie hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ (ou $\overline{\langle b, a \rangle}$)
- positive : $\langle x, x \rangle \geq 0$ quelque soit $x \in E$
- définie : $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

Norme associée :

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall a, b \in E, \ |\langle a, b \rangle| \leq ||a||.||b||$$

Espaces $\mathcal{L}^p$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré. Alors $\forall p \in [1, +\infty]$, l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables telles que $|f|^p$ est intégrable (pour $p < +\infty$), et on note :

$$\begin{aligned} ||f||_p &= \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}m \right)^{1/p} \quad \text{si } p < +\infty, \text{ sinon} \\ ||f||_\infty &= \min \left\{ C \geq 0,\ \{|f| > C\} \ \text{est négligeable} \right\}, \\ &\text{avec } \ \{|f| > C\} = \{x \in \Omega,\ |f(x)| > C\} \end{aligned}$$

$||.||_\infty$ est le *supremum essentiel*, càd la plus petite valeur M telle que $|f| \leq M$ presque partout.
Attention : $||.||_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$ mais une semi-norme (un élément de semi-norme 0 peut être non nul).

Inégalités de Hölder, Minkowski

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Hölder :

$$\forall f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m), \forall g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(m), ||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

- Minkowski :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m), ||f + g||_p \leq ||f||_p ||g||_p$$

Valables pour les espaces $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$ et $\mathrm{L}^q_{\mathbb{K}}(m)$ Formulation en dimension finie :

- Hölder :

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n, ||xy||_1 \leq ||x||_p ||y||_q \text{ avec } xy \text{ le produit terme à terme}$$

- Minkowski :

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n, ||x + y||_p \leq ||x||_p ||y||_p$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty]$. $||.||_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$ car un élément non nul peut avoir une semi-norme nulle, donc deux éléments à pseudo-distance 0 l'un de l'autre peuvent être différents. Solution : quotienter par la relation d'équivalence $||f-g||_p = 0$, prétendre que deux éléments à distance 0 sont les mêmes. Pour $p < +\infty$:

$$
\begin{aligned}
\forall f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m),\ ||f-g||_p = 0 &\iff \left(\int_\Omega |f-g|^p\right)^{1/p} = 0 \\
&\iff \left(\int_\Omega |f-g|^p\right) = 0 \\
&\iff |f-g|^p = 0 \text{ presque partout} \\
&\iff f = g \text{ presque partout}
\end{aligned}
$$

Pareil pour $||.||_\infty$ le supremum essentiel : $||f-g||_\infty = 0 \iff f = g$ presque partout. Pour $p \in [1,+\infty]$:

$$\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(m) = \{\{g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m),\, g = f \text{ p.p.}\}\,,\, f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)\}$$

Si deux éléments f, g quelconques de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m)$ vérifient $||f-g||_p = 0$, alors :

$$\begin{aligned} ||f||_p \leq ||g||_p + ||f-g||_p \leq ||g||_p \\ ||g||_p \leq ||f||_p + ||g-f||_p \leq ||f||_p \\ \implies ||f||_p = ||g||_p \end{aligned}$$

On peut donc définir sans ambiguité la norme d'un élément f de $L^p_{\mathbb{K}}(m)$ comme la semi-norme d'un élément de f.
Attention : si $f \in L^p_{\mathbb{K}}(m)$, on peut passer n'importe quel élément de f sous l'intégrale sans que ça change quoi que ce soit, donc on peut faire passer f sous l'intégrale, mais on ne peut pas écrire $f(x) = \ldots$ parce que deux représentants de f peuvent ne pas avoir la même valeur en x.

Applications linéaires continues

Soient $(E, ||.||_E)$, $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés. $\mathrm{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue sur E
- f est continue en 0
- f est bornée sur $B(0, 1)$
- f est lipschitzienne : $\exists M \geq 0$, $\forall x \in E$, $||f(x)||_F \leq M||x||_E$

La norme d'opérateur

$$||f|| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E} = \sup_{x \in B_f(0,1)} ||f(x)||_F$$

est la plus petite constante M telle que f est M-lipschitzienne.

Compacité : définition

Dire qu'une partie X de E est compacte revient à énoncer l'une des deux propriétés suivantes (elles sont équivalentes) :

- Borel-Lebesgue : pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ (appelée recouvrement ouvert de X), il existe une sous-famille finie $X \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ (avec J partie finie de I) telle que $X \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ (sous-recouvrement fini)
- Bolzano-Weierstrass : toute suite d'éléments de X possède une valeur d'adhérence dans X (c'est-à-dire une sous-suite qui converge vers un élément de X)

Exemples :

- parties finies de E
- fermés bornés si E est un EVN de dimension finie

Compacité : propriétés

- compact $\implies$ fermé borné (à sens unique en général)
- un fermé inclus dans un compact est compact
- une union finie de compacts est compacte
- si $f : E \longrightarrow F$ est continue, et C est un compact de E, $f(C)$ est un compact de F
- un produit cartésien de compacts (muni de la norme/distance produit) est compact
- théorème de Heine

Soient (E, d), (F, d') des espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$

$$\text{continuité} : \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ \exists \delta > 0,\ \forall x' \in B(x, \delta),\ f(x') \in B(f(x), \varepsilon)$$
$$\text{continuité uniforme} : \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ \forall x' \in B(x, \delta),\ f(x') \in B(f(x), \varepsilon)$$

Pour la continuité uniforme, on peut prendre le même δ pour tous les x : propriété plus forte que la continuité.
Continuité uniforme $\implies$ continuité. Réciproque fausse (contre-exemple : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1[$)
Théorème de Heine :
Si f est continue sur un compact, elle est uniformément continue sur ce compact.

Soit E un EV, N et N' deux normes sur E. N et N' sont dites équivalentes si $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leq N' \leq \beta N$. Ce qui est équivalent à $\forall x \in E$, $\forall r > 0$, $B_N\left(x, \frac{r}{\beta}\right) \subset B_{N'}(x, r) \subset B_N\left(x, \frac{r}{\alpha}\right)$. Cela implique :

- les mêmes ouverts
- les mêmes fermés
- les mêmes suites convergentes
- les mêmes compacts
- les mêmes suites de Cauchy (ça c'est pas forcément vrai pour des distances équivalentes, l'équivalence de normes est plus forte que l'équivalence de distances)

Sur un EV de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

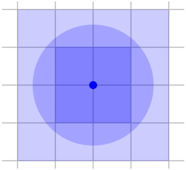

Figure – boules de 2 normes équivalentes

Soit (E, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de E.

Suite convergente : $\exists x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x, x_n) < \varepsilon$

Suite de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_N, x_n) < \varepsilon$

Toutes les suites convergentes sont de Cauchy.
Si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E, on dit que E est *complet*.
Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.
Un *espace de Hilbert* est un espace préhilbertien complet.